

Minissimpósio - CNMAC 2026

Funções Especiais e Polinômios Ortogonais

Organizadores:

- **Daniel Oliveira Veronese**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)
Uberaba, MG
e-mail: daniel.veronese@uftm.edu.br
- **Mirela Vanina de Mello**
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
Ilhéus, BA
e-mail: mvmello@uesc.br
- **Vanessa Avansini Botta Pirani**
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Presidente Prudente, SP
e-mail: vanessa.botta@unesp.br
- **Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz**
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
São José do Campos, SP
e-mail: vanessa.paschoa@unifesp.br

Resumo:

O Minissimpósio de Funções Especiais e Polinômios Ortogonais ocorre tradicionalmente no âmbito do CNMAC. O Professor Alagacone Sri Ranga esteve diretamente envolvido em sua idealização e organização ao longo de diversos anos, contribuindo de forma decisiva para sua consolidação. Em 2026, por ocasião do seu septuagésimo aniversário, o minissimpósio propõe uma homenagem ao Prof. A. Sri Ranga em reconhecimento à sua trajetória científica e às suas notáveis contribuições para o desenvolvimento da Matemática Aplicada e Computacional no Brasil.

O evento integrará a programação do CNMAC 2026 e reunirá pesquisadores, colaboradores e ex-orientandos cujos trabalhos se relacionam às áreas de atuação do Prof. A. Sri Ranga. A área de Funções Especiais e Polinômios Ortogonais possui amplas aplicações em Matemática Pura e Aplicada, oferecendo ferramentas fundamentais para a teoria espectral, frações contínuas, integração numérica, estabilidade numérica e algoritmos eficientes, com aplicações em diversas áreas da ciência.

O Prof. A. Sri Ranga é reconhecido internacionalmente por suas contribuições à teoria dos polinômios ortogonais, funções especiais, análise espectral e frações contínuas, nas quais produziu resultados de grande impacto. Sua atuação inclui a formação de pesquisadores e a consolidação de programas de pós-graduação.

Neste minissimpósio, serão apresentados trabalhos e discutidos avanços recentes na área, celebrando o legado científico e o papel inspirador do Prof. A. Sri Ranga na comunidade matemática.

Convidados, títulos e resumos das palestras:

Programação sugerida

- 15/09 - 08h00 às 08h30

CLEONICE FÁTIMA BRACCIALI

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

São José do Rio Preto, SP.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8300322452622467>

Título: Trajetória e legado do Professor A. Sri Ranga em Funções Especiais e Polinômios Ortogonais

Resumo: Professor A. Sri Ranga, natural do Sri Lanka, fez seu doutorado na Universidade de St. Andrews, Escócia em 1983 e transferiu-se para o Brasil em 1985. Desde então dedicou-se à pesquisa e à formação de pesquisadores em Matemática, mais especificamente na área de Funções Especiais e Polinômios Ortogonais. Na comemoração de seus 70 anos, apresentaremos detalhes de sua carreira acadêmica e legado científico.

- 15/09 - 08h30 às 09h00

LUANA L. SILVA RIBEIRO

Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI).

Itabira, MG - Brazil.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4476761079733462>

Title: Differential equations for a class of semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle

Abstract: We consider semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle associated with a weight function that satisfies a Pearson-type differential equation involving two polynomials of degree at most three. In this talk, we explore the second order differential equations satisfied by these polynomials and the difference equations involving their Verblunsky coefficients. In this context, the Verblunsky coefficients are explicitly known only for two families: the Jacobi polynomials on the unit circle, studied in Badkov (1978), and the polynomials considered in Ranga (2010). We also discuss some examples in

which the Verblunsky coefficients satisfy a discrete Painlevé II equation.
Joint work with Cleonice F. Bracciali (UNESP) and Karina S. Rampazzi (SESI-SP)

- 15/09 - 09h00 às 09h30

DANIEL OLIVEIRA VERONESE

UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Uberaba, MG

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1525907430032599>

Title: NEW EXAMPLES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH EXPLICIT QUADRATIC DECOMPOSITIONS

Abstract: In this talk we consider a non-single parameter positive chain sequence $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ and use all the non-minimal parameter sequences for $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ in order to generate a whole family of sequences of orthogonal polynomials on the real line. For each non-minimal parameter sequence, the orthogonal polynomials and the associated orthogonality measure are obtained. As an application, the corresponding quadratic decompositions are explicitly given. This work was inspired by some recent contributions developed by professor Alagacone Sri Ranga and his collaborators.

Joint work with G. S. Costa.

- 15/09 - 09h30 às 10h00

REGINA LITZ LAMBLÉM

Universidade Estadual De Mato Grosso do Sul (UEMS)

Cassilândia, MS - Brasil.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9806803051844758>

Título: POLINÔMIOS DE SZEGŐ E EXTENSÕES: CONTRIBUIÇÕES EM MESTRADO E DOUTORADO

Resumo: Os polinômios de Szegő constituem uma importante classe de polinômios ortogonais definidos no círculo unitário, satisfazendo relações de ortogonalidade com respeito a uma medida positiva nesse domínio. Uma de suas

características fundamentais é a relação de recorrência, por meio da qual toda a sequência pode ser gerada a partir dos coeficientes de reflexão. Os polinômios mônicos de Szegő clássicos são caracterizados pelo fato de seus coeficientes de reflexão possuírem módulo menor que um. Nesta palestra, revisitamos as pesquisas desenvolvidas durante o mestrado e o doutorado, realizadas sob a orientação do Professor Doutor Alagacone Sri Ranga. No mestrado, investigamos uma situação em que os coeficientes de reflexão possuem módulo maior que um, o que rompe as condições usuais de ortogonalidade. Nesse contexto, analisamos diversas propriedades estruturais dos polinômios de Szegő, incluindo o papel dos funcionais associados e a consequente localização dos zeros, que passam a exibir comportamento distinto do caso clássico. Já na tese de doutorado, o foco recaiu sobre os polinômios do tipo Szegő, os quais constituem uma generalização dos polinômios clássicos, submetidos a condições menos restritivas. Assim como no caso usual, esses polinômios também satisfazem relações de recorrência que permitem descrevê-los, expandindo o alcance teórico e aplicativo dos polinômios do tipo Szegő.

- 16/09 - 08h00 às 08h30

CLEONICE FÁTIMA BRACCIALI

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

São José do Rio Preto, SP.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8300322452622467>

Title: R_{II} TYPE THREE TERM RELATIONS FOR BIVARIATE POLYNOMIALS ORTHOGONAL WITH RESPECT TO VARYING WEIGHTS

Abstract: Given a bivariate weight function defined on the positive quadrant of $\mathbb{R}^2$, we present polynomials in two variables orthogonal with respect to varying measures obtained by special modifications of this weight function. In particular, the varying weight functions are given by the multiplication of $x_1^{-n}x_2^{-n}$ times the original weight function. Apart from the question of the existence and construction of such kind of orthogonal polynomials, we show that the systems of bivariate polynomials orthogonal with respect to this kind of varying weights satisfy R_{II} type three term relations, one for every variable.

A method to construct bivariate orthogonal systems with respect to varying weights based on the Koornwinder's method for generating standard bivariate orthogonal polynomials is developed. Finally, several examples and particular cases have been analysed.

Joint work with A. M. Delgado, L. Fernández, and T. E. Pérez from University of Granada, Spain.

Reference:

[1] C.F. Bracciali, A.M. Delgado, L. Fernández, T.E. Pérez: R_{II} type three term relations for bivariate polynomials orthogonal with respect to varying weights. Results in Mathematics, v. 80, art. 206, 2025.

- 16/09 - 08h30 às 09h00

JÉSSICA VENTURA DA SILVA

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Presidente Prudente, SP - Brasil.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3679815976391787>

Título: POLINÔMIOS ORTOGONAIS COM RELAÇÃO A UMA FAMÍLIA DE PRODUTOS INTERNOS DE SOBOLEV NO CÍRCULO UNITÁRIO: LIMITANTES, RESULTADOS ASSINTÓTICOS E ZEROS

Resumo: O principal objetivo deste trabalho é apresentar o estudo sobre uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário introduzida por A. Sri Ranga em “Orthogonal polynomials with respect to a family of Sobolev inner products on the unit circle”, Proc. Amer. Math. Soc., 144 (2016), 1129-1143.

A família de produtos internos de Sobolev associada envolve pares de medidas satisfazendo a propriedade de “coerência de segundo tipo no círculo unitário”, o que possibilita representar os polinômios ortogonais, associados a este produto interno, por meio de relações simples envolvendo uma sequência de “coeficientes de conexão”; tais coeficientes, para alguns parâmetros, estão relacionados a uma subclasse dos polinômios continuous dual Hahn.

Além disso, apresentaremos algumas condições para que os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev e/ou de suas derivadas estejam dentro do disco unitário. E, usando experimentos numéricos, encontramos mais informações sobre os parâmetros para que os zeros de tais polinômios estejam dentro do disco unitário.

Referências:

- [1] C.F. Bracciali, J.V. da Silva, A. Sri Ranga, A class of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and associated continuous dual Hahn polynomials: Bounds, asymptotics and zeros, *J. Approx. Theory*, **268** (2021) 105604.
- [2] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Nørsett, J.M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory*, **65** (1991), 151-175.
- [3] J. V. da Silva, *Uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário: limitantes, resultados assintóticos e zeros*, Tese de Doutorado (2022), IBILCE/UNESP.
- [4] A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials with respect to a family of Sobolev inner products on the unit circle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144** (2016), 1129-1143.

• 16/09 - 09h00 às 09h30

A. SRI RANGA

Universidade Estadual Paulista (UNESP).

São José do Rio Preto, SP - Brazil.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8806516640564311>

Title: PARA-ORTHOGONAL POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE: A DIFFERENT VIEW

Abstract: Para-orthogonal polynomials on the unit circle (POPUC for short) are known to be very interesting from many practical and theoretical points of view.

Let $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ be a sequence of orthogonal polynomials with respect to a measure μ on the unit circle. Then, for any $n \geq 1$, the polynomial given by $\psi_n(z) =$

$\phi_n(z) - \rho \phi_n^*(z)$ is known as a POPUC of degree n if the complex constant ρ is such that $|\rho| = 1$. Here, $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$ is the reciprocal polynomial.

One of the most important characteristic associated with orthogonal polynomials on the real line is that they satisfy a very nice three term recurrence relation (TTRR for short). Since the zeros of these polynomials lie along the interval (or line) of orthogonality, this characteristic also turned out to be very useful when analyzing many of the properties and applications of these polynomials.

This characteristic is absent, in general, in the case of orthogonal polynomials on the unit circle (OPUC for short). In specific cases OPUC do satisfy a TTRR. However, as the zeros of OPUC do not lie along the contour of orthogonality, which is the unit circle, the TTRR has not turned out to be much useful when studying the properties of these polynomials. Any way, TTRR has been successfully used in [4] to derive one of the best example of a sequence of OPUC.

In the case of POPUC, it is known that their zeros are distinct and lie along the unit circle. That is, along the contour of orthogonality. Hence, if it is possible to find a sequence of POPUC of successive degree that satisfies a TTRR, one can expect that this may provide some means to study the properties and applications of the polynomials in the sequence. We see that it is always possible to find such sequences of POPUC.

Some of the questions that we address here are the following. Given a measure μ , can we choose a different value for ρ for each n and arrive at some special sequence of POPUC that can be studied in an organized way? Can we find good examples that justify such a sequence of para-orthogonal polynomials? Are there applications of such sequence of para-orthogonal polynomials in other areas of mathematics?

Referências: [1] M.J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez, Measures and para-orthogonal polynomials on the unit circle, *East J. Approx.*, **8** (2002), 447-464.
[2] L. Golinskii, Quadrature formula and zeros of para-orthogonal polynomials on the unit circle, *Acta Math. Hungar.*, **96** (2002), 169-186.

[3] W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **21** (1989), 113-152.

[4] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**, (2010), 4243–4247.

- 16/09 - 09h30 às 10h00

Título: HOMENAGEM AO PROFESSOR A. S. RANGA

Resumo: Momento dedicado à homenagem ao professor A. S. Ranga pelos seus colegas e ex-alunos.